Laura Delgado Martín

Didáctica de la Geometría

AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

La edición de este libro ha sido parcialmente financiada por una subvención del Programa Propio V de la Agencia de Gestión de la Investigación, Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de la Universidad de Salamanca.

Didáctica de la Geometría

Primera edición: 2021

ISBN: 9788418808142
ISBN eBook: 9788418808579
Depósito Legal: SE 1519-2021

Impreso en España – Printed in Spain

2, 3, 7, 13

De alguna forma hay que comenzar. . . , de cómo encontré a la Geometría, o de cómo la Geometría me encontró a mí.

Desde que comencé mi carrera profesional como profesora de Matemáticas, siempre ha habido un bloque de contenidos con los que me he ido encontrando una y otra vez, y ya han pasado a formar parte de mí. Al principio fue una casualidad, pero a medida que transcurría el tiempo, se convirtieron en mi parte favorita de la asignatura.

En 1998 comencé a trabajar en la Universidad de Salamanca, primero en la Escuela Universitaria de Educación y Turismo de Ávila, actualmente en la Facultad de Educación de Salamanca. Durante muchos años la asignatura recurrente en mi docencia fue la Didáctica de la Geometría, en nuestro plan de estudios de la Universidad de Salamanca, correspondiente a las Matemáticas y su Didáctica II, del grado de Maestro de Educación Primaria.

Han sido muchos años de docencia, de preparación de materiales, de proyectos de Innovación Docente, asociados a esta y otras asignaturas. . .

Y también una lluvia de ideas en los congresos con los compañeros del área. Concretamente en las reuniones anuales de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), y concretamente en el grupo dedicado al aprendizaje de la Geometría (APRENGEOM). De ese grupo y de las reuniones periódicas surgieron muchas ideas, muchos recursos. Quiero recordar a dos personas especialmente: Mª Lluisa Fiöl Mora y Enrique de la Torre, siempre referentes de los que aprender, escuchar y ayudas encomiables.

Durante estos años de docencia, he elaborado apuntes, problemas, recursos manipulativos y online, vídeos, diseños de asignatura... no siempre se han podido llevar a cabo en su totalidad, a veces la docencia, el día a día mandan y si tienes 80 o 90 alumnos en un aula se complica todo mucho.

Este banco de recursos e ideas es lo que quiero plasmar en este libro. Junto con ellos, están mis recuerdos de los alumnos, de las clases, de las aulas de la Escuela de Ávila donde se han desarrollado. Han sido muchos años de aprendizaje y siempre presentes en el día a día.

Me gustaría acabar esta pequeña introducción personal, con una justificación de por qué la Geometría. La encontré en un libro de Alsina, Burgués y Fortuny de la Editorial Síntesis, y el primer día de curso, al comenzar las clases de la asignatura, comenzaba con este texto:

> A modo de comienzo:
>
> ¿Por qué Geometría?
>
> - Para conocer una de las ramas matemáticas más instructivas.
> - Para cultivar la inteligencia humana.
> - Para desarrollar estrategias de pensamiento.
> - Para descubrir las propias posibilidades creativas.
> - Para aprender una materia interesante y útil.
> - Para fomentar una sensibilidad hacia lo bello.
> - Para trabajar Matemáticas experimentalmente.
> - Para agudizar la visión del mundo que nos rodea.
> - Para gozar de sus aplicaciones prácticas.
> - Para disfrutar aprendiendo y enseñando.
>
> ... y porque la Geometría desea estar en su clase.

Alsina C., Burgués C., Fortuny J. M. (1999) Invitación a la didáctica de la geometría. Madrid: Síntesis.

Índice

Anexos

Capítulo 1

Introducción a la Geometría en el aula de Matemáticas

Importancia histórica, curricular y enfoque pedagógico del texto

La definición formal de Geometría, nos dice que:

> La Geometría es la disciplina matemática que estudia el espacio y las formas (figuras planas y cuerpos) que en él aparecen.

Para saber dónde queremos ir, debemos saber de dónde venimos. Comenzar las clases de Geometría con un poco de historia, puede descolocar a los alumnos. No es abrumarles con datos, fechas, nombres. . . , más bien ubicarles, por qué esta rama de las matemáticas es importante, por qué el ser humano la necesita, y también por qué vamos a desarrollarla de la forma que lo vamos a hacer en los capítulos siguientes. Todo tiene su porqué en matemáticas, solo hay explicarlo y hacerlo visible.

Sus inicios históricos los podemos establecer en el Antiguo Egipto, y su aparición, como tantas cosas, surgió de la necesidad. Antiguamente, antes de la construcción de la presa de Asuán, el río Nilo sufría crecidas anuales que inundaban las riberas del río.

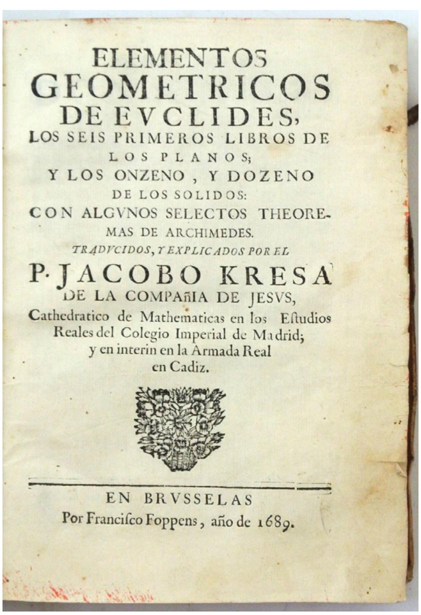
Figura 1.1. Actividades agrícolas en Egipto
Fuente: https://bit.ly/34dwa1N

Estas crecidas eran fundamentales para la fertilidad de aquellas tierras (fig. 1.1), pero cuando el río se retiraba a sus márgenes normales, surgía un problema: había que repartir los terrenos y parcelas que habían sido inundados. Esto suponía, en definitiva, un cálculo de perímetros y áreas.

De ahí viene el nombre original:

GEO	METRÍA
↓	↓
tierra	medida

(del latín *geometrĭa*, y este del griego *γεωμετρία* de *γῆ gē*, 'tierra', y *μετρία metría*, 'medida')



ELEMENTOS
GEOMETRICOS
DE EVCLIDES,
LOS SEIS PRIMEROS LIBROS DE
LOS PLANOS;
Y LOS ONZENO, Y DOZENO
DE LOS SOLIDOS:
CON ALGVNOS SELECTOS THEOREMAS DE ARCHIMEDES.
TRADVCIDOS, Y EXPLICADOS POR EL
P. JACOBO KRESA
DE LA COMPAÑIA DE JESVS,
Cathedratico de Mathematicas en los Eſtudios Reales del Colegio Imperial de Madrid; y en interin en la Armada Real en Cadiz.

EN BRVSSELAS
Por Franciſco Foppens, año de 1689.

Figura 1.2. Los Elementos de Euclides
Fuente: https://bit.ly/39J9Eij

Precisamente la Geometría alcanza entidad matemática en la Grecia del año 300 a.C. con Euclides (325-265 a.C.) y sus «Elementos», libro base de la Geometría Clásica o Euclídea que fue indiscutible hasta 2000 años después, hasta principios del siglo XX (fig. 1.2).

La estructura del libro es la siguiente, los «Elementos de Euclides» están divididos en varias partes definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones.

1. **Definiciones**: son 23, absolutamente elementales como conceptos geométricos, por ejemplo:
    1. Un punto es lo que no tiene partes.
    2. Una línea (recta o curva) es una longitud sin anchura.
    3. Los extremos de una línea son puntos.
    4. Una línea yace por igual respecto a todos sus puntos (para Euclides las líneas eran finitas, lo que ahora consideraríamos un segmento).
    5. Una superficie tiene longitud y anchura.
    6. Los extremos de una superficie son líneas.
    7. Una superficie plana yace por igual respecto a sus líneas rectas.
    8. Angulo plano es el formado por dos líneas rectas que se encuentran en el mismo plano y confluyen en un punto.
    9. Angulo recto es el formado por dos rectas perpendiculares entre sí.
    10. Dos rectas son paralelas si estando en el mismo plano las prolongamos infinitamente y no se cortan nunca, etc.

El resto de las definiciones son de ángulo obtuso, agudo, círculo, diámetro, triángulo, cuadrado...

Hay que poner algunas objeciones a las definiciones de Euclides porque algunas se apoyan en términos que no han sido definidos previamente como longitud, anchura, inclinación, etc. Como definiciones, como se entienden en nuestro momento actual, quedan un poco vacías.

Pero ¿cómo se puede definir algo de lo que todo el mundo tiene un concepto claro?: De ninguna manera. De hecho, de todas estas objeciones surgen las nuevas visiones de la Geometría en el siglo XX.

Euclides se basó en la **intuición**, en las **ideas preconcebidas** que todos tenemos sobre estos términos para describir sus definiciones. Pero estas definiciones en realidad no son necesarias por evidentes. Parece ser que lo hizo por **motivos pedagógicos**.

2. **Postulados:** son cinco sobre los que descansa toda la Geometría clásica:
    1. Por dos puntos siempre pasa una línea recta.
    2. Las rectas se pueden prolongar indefinidamente.
    3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
    4. Todos los ángulos rectos son iguales.
    5. Dada una recta y un punto exterior a ella existe una única recta que pasa por este punto y es paralela a la recta dada.

    De este último postulado se derivan las geometrías no euclídeas, ya que no siempre es cierto.
3. **Nociones comunes:** se trata de verdades aplicables a cualquier ciencia, recursos argumentativos y de razonamiento que podremos aplicar a casi, cualquier cosa.
    1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
    2. Dadas dos cosas iguales a las que se les suma una misma cantidad, los resultados son iguales entre sí.
    3. Dadas dos cosas iguales a las que se les resta una misma cantidad, los resultados son iguales entre sí.
    4. Dos cosas que coinciden son iguales entre sí.
    5. El todo el mayor que una parte.

1. Proposiciones

A partir de todo lo anterior y usando el *razonamiento hipotético deductivo*, llegamos a las proposiciones que son verdades pero con una demostración (a diferencia de los axiomas que son verdades absolutas que no necesitan ser demostradas). A partir de las proposiciones llegamos a los **Teoremas**, resultados generales, de gran importancia y utilidad posterior que obviamente también necesitan ser demostrados.

La estructura deductiva de los «Elementos» es bastante perfecta y se la ha considerado como modelo de rigor matemático. Pero, a finales del siglo XIX empiezan las dudas y fue Hilbert (David Hilbert, 1862-1943, Alemania), quien reformuló la Geometría.

Este matemático consideraba que no hacía falta ninguna definir todos los primeros elementos de la Geometría y así introduce puntos, rectas, planos, etc. sin definirlos previamente. Posteriormente basa su teoría en veinte axiomas sustituyendo a la formulación Euclídea.

Sin embargo, el enfoque que da Euclides a la Geometría puede adaptarse mejor a la enseñanza primaria. Hay que recordar que los «Elementos» han sido libro de texto hasta principios del siglo XX. De este modo, la visión de la Geometría y el tema siguiente comienza con la introducción de conceptos primeros. Todos ellos muy intuitivos y clarificadores, a veces, carecen de cierto rigor matemático, pero son muy acertados pedagógicamente.

Tenemos que construir nuestra casa geométrica con los primeros ladrillos, cuando lleguemos a los detalles, a los cálculos, al razonamiento de los problemas más complejos, puede que no seamos conscientes de esos pequeños ladrillos y de la argamasa que los une. Lo que es claro, es que, si no están bien construido, puede suceder como los cimientos y el armazón de una casa, no se ven, cumplen su función, sujetan la construcción de forma firme, si no lo fuese, en algún momento, esa construcción se vendría abajo como un castillo de naipes.

En la enseñanza de las matemáticas, coexisten tres tendencias muy bien diferenciadas, y aunque entre ellas se consideran excluyentes, en la práctica se usan de forma indistinta:

1. Logicismo: las matemáticas son una rama de la lógica y con ella nos remontamos a la lógica aristotélica.
2. Formalismo: uno de sus máximos representantes es el mencionado Hilbert y el mayor fue Bertrand Russell (Gales, 1872-1970) fue un filósofo, matemático y escritor británico.
3. Intuicionismo: El más útil cuando se comienza a enseñar matemáticas a niveles inferiores y muy útil en el caso de la Geometría y también de otras ramas como la Aritmética.

En Matemáticas superiores es el formalismo el que adquiere un mayor peso. Pero la intuición, la claridad la tangibilidad de la Geometría clásica nos aconseja usar en ella la intuición y simplicidad de Euclides.

Muchas veces olvidamos, que los primeros conceptos matemáticos, que las primeras resoluciones de problemas... las hicimos en un aula de infantil y primaria.

Los alumnos a los que los maestros enseñan, no sabemos qué futuro van a tener, pueden ser grandes músicos, o matemáticos, o trabajar en un almacén..., esto es una incógnita, lo que es cierto es que todos ellos aprendieron sus primeras matemáticas en un aula de primaria.

Comenzando desde este primer peldaño, subiremos una escalera, paso a paso, sin saltarnos nada. Partiendo de lo más intuitivo, de los más elemental y elaborando un discurso y un razonamiento cada vez más complejo.

En matemáticas, los escalones se suben de uno en uno. No nos podemos saltar nada, porque en algún momento esa carencia aflorará. Hay alumnos que suben la escalera más rápido que otros, todos somos diferentes y tenemos capacidades distintas. Pero siempre, subiremos la escalera de peldaño en peldaño.

Y como toda escalera, comenzamos por el 1...

De acuerdo con este planteamiento, la estructura de este manual es la siguiente: comenzando con un capítulo 2 de conceptos fundamentales, los elementos básicos a partir de los que construiremos nuestra «casa» geométrica; en el capítulo 3 plantearemos problemas y ejercicios relacionados con estos conceptos fundamentales; en el capítulo 4 nos encontramos con las figuras en el plano, cómo calcular perímetros, áreas y la justificación didáctica de estos cálculos y fórmulas; en el capítulo 5, tendremos los ejercicios y problemas que acompañan a estos conceptos; dedicaremos el capítulo 6 la figuras planas con peculiaridades geométricas, la circunferencia, el círculo y elementos relacionados con ellas, así como los diferentes tipos de ángulos y cómo calcularlos; en el capítulo 7 tendremos los ejercicios y problemas correspondientes a estos elementos; en el capítulo 8 abriremos un tema muy amplio, el cálculo de longitudes y ángulos en triángulos, y vislumbraremos el enorme paisaje que la puerta de la trigonometría nos abre; en el capítulo 9 nos dedicaremos a plantear ejercicios y problemas relacionados con este tema; en el capítulo 10 aterrizaremos en un mundo de tres dimensiones, con los cuerpos básicos, tanto poliedros como cuerpos de revolución que se obtienen por giros de otros más elementales; en el capítulo 11 plantearemos ejercicios y problemas con estos contenidos; en el capítulo 12, abordaremos el modelo clásico de enseñanza de la Geometría: el modelo de Van Hiele, que subyace al planteamiento general de todo este texto, en este momento veremos cómo todo lo explicado obedece a este modelo y su justificación didáctica será obvia con todos los contenidos a la vista. Acabaremos el libro con la bibliografía, tanto de libros, artículos, como páginas web recomendadas. Y por último, en los anexos, aparecerán los talleres a realizar en el aula, con materiales manipulativos clásicos y también con alternativas que permiten mucho más que jugar como es la papiroflexia, demostraremos propiedades matemáticas manipulando papel, un recurso que nos permite una reflexión acerca de lo que hacemos, nos permite conectar con la parte teórica y plasmarla en la realidad, y sobre todo de fácil manejo para cualquier alumno. Manipular papel nos permitirá dar tiempo a cada alumno para reflexionar, hacer, deshacer y comprobar por sí mismo muchas propiedades, conceptos e ideas, con lo cual la apropiación personal de las mismas será mucho mayor que si «simplemente» lo dejamos en meras demostraciones teóricas.

Todas las imágenes de este libro son de elaboración propia, bien usando el *software* libre Geogebra o fotografías directas de las manipulaciones en papel a las que se hace referencia antes.

Los contenidos que aparecen en este manual, no están directamente vinculados con ningún currículum oficial, ni BOE ni concreción autonómica. En realidad, estos contenidos son autoconsistentes con la propia epistemología matemática. Se parte de los contenidos más elementales y a partir de ellos se estructuran, vinculan y apoyan todos los demás. Evidentemente hay una conexión con los contenidos habituales que se imparten en Educación Primaria, pero se mira hacia delante y hacia atrás. Tenemos el convencimiento personal que los futuros docentes de Educación Primaria, no pueden ver su etapa educativa aislada en el espacio y el tiempo: sus alumnos vienen de otra etapa educativa (no obligatoria, pero en nuestro país los alumnos están mayoritariamente escolarizados en ella) y van a una etapa obligatoria, en la que por normativa, y esto aparece en cualquier legislación pasada y actual, se debe conectar con lo hecho antes.

En matemáticas, todo tiene un porqué, a veces por la complejidad del contenido, por el desarrollo evolutivo de los alumnos, no nos atrevemos a formular los contenidos con todo el rigor matemático requerido, pero esto no quiere decir que no debamos formar a los futuros maestros en este rigor.

En los informes de evaluación que periódicamente se publican, se achacan algunos males y defectos de nuestro sistema educativo en el ámbito de las matemáticas, a una escasa formación de los maestros. No podemos quedarnos cortos en ella. Los maestros deben saber más de lo que imparten, para poder hacer una trasposición didáctica adecuada de los contenidos a la realidad de su aula, cada año cambiante y a lo largo de su carrera docente, múltiple en cambios, tanto de alumnos, capacidades, como de normativas a aplicar.

Siguiendo con esta línea, algunos contenidos expresados en este manual pueden atribuirse a cursos superiores o inferiores de la etapa de Educación Primaria. Nuestro objetivo no es ceñirnos a un currículum establecido, sino a una estructura lógica que debe conocer un profesional de la docencia, que debe tener un conocimiento adecuado de su materia para impartirla en el aula, sean cuales sean las circunstancias concretas, específicas de un aula, de una norma, de una adaptación curricular específica.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En este capítulo, vamos a comenzar con las ideas fundamentales, básicas que se deben tener claras antes de empezar con cualquier razonamiento o deducción.

1. Plano, recta, punto, semiplano y semirrecta

Algunas de las definiciones que vamos a presentar se sustentan en la intuición, más que en el rigor. Son necesarias por cuanto nos permiten comenzar desde lo más elemental.

1.1. ¿Qué es un plano?

Un plano es un conjunto infinito de puntos. Por ejemplo el tablero de la mesa, un folio, el suelo, la pared... Nos sirve cualquier ejemplo que podamos poner, pero insistiendo que los límites no existen, se pueden prolongar todo cuanto queramos.

Si enseñamos un pliego de papel, la idea es que pudiéramos prologarlo a lo largo y a lo ancho infinitamente (fig. 2.1).

Los planos no tienen grosor, son de dos dimensiones (largo y ancho).

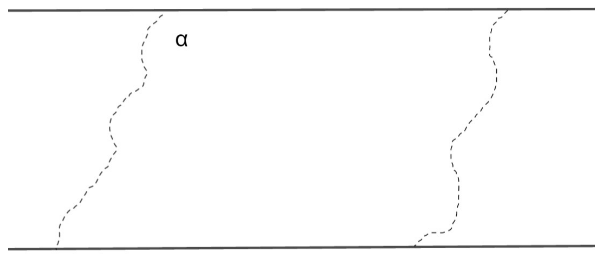


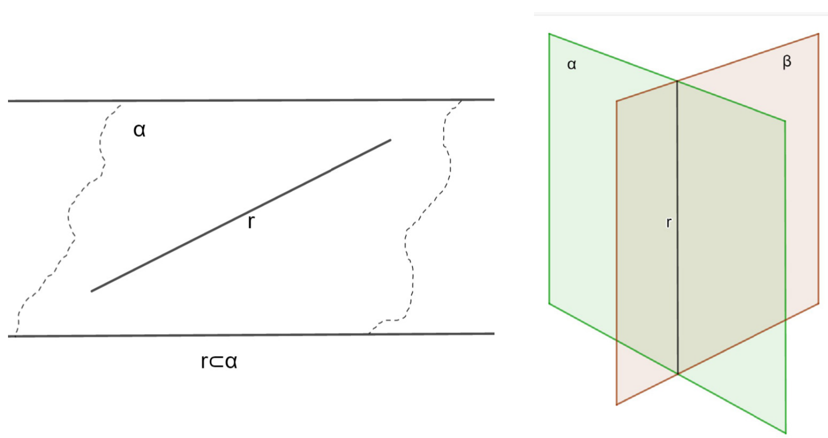
Figura 2.1. Dibujo de un plano, infinitamente prolongable, nombrado formalmente

Los planos son infinitamente grandes, luego solo dibujamos una porción de ellos.

Cuando los nombremos, y vamos a ir mezclando notación rigurosa, se nombran con letras griegas: α, β, γ...

1.2. ¿Qué es una recta?

Una recta es un subconjunto de infinitos puntos del plano situados en la misma dirección. Luego toda recta, debe estar incluida en un plano, como se ve en la figura la recta r está incluida en el plano a: $r \subset \alpha$ (fig. 2.2a).



(a) (b)

Figura 2.2. (a) Recta incluida dentro de un plano; (b) Intersección de dos planos no paralelos dan lugar a una recta